OLASILIKVE İSTATİSTİK

İki Boyutlu Rasgele Değişkenler

Bir deney yapıldığında, aynı deneyle ilgili birçok rasgele değişkenin aynı andaki durumunu düşünmek gerekebilir. Böyle durumlarda iki ya da daha yüksek boyutlu rasgele değişkenler ele alınır. Örneğin, bir fabrikada üretilen bir çelik parçasının sertliği ve dayanıklılığı ile ilgilenilip, bir tek deneysel netice olarak (sertlik, dayanıklılık) ikilisi göz önüne alınabilir.

Bir kitleden rasgele seçilen belli sayıdaki işçilerin boy uzunluğu ile ağırlıkları bir arada düşünülebilir.

$X\ :Boy\ uzunluğu$

$Y\ :Ağırlık$

olarak tanımlandığında, rasgele seçilen bir işçinin boy uzunluğu ile ağırlığı (X,Y) ile gösterilir ve iki boyutlu rasgele değişken olarak adlandırılır. Yani iki boyutlu rasgele değişkenler ele alınır.

(X,Y) iki boyutlu rasgele değişkeninin alabileceği değerler (x,y) ile gösterilir.

Örnek. İki tane hilesiz madeni para havaya atıldığında üste gelen tura ve yazı sayılarıyla ilgilenelim.

Örnek uzayı,

$S=\{TT,TY,YT,YY\}$

olur.

$X\ :Üste\ gelen\ turaların\ sayısı$

$Y\ :Üste\ gelen\ yazıların\ sayısı$

olarak tanımlandığında,

X ’in alabileceği değerler $x=0,1,2$

Y ’nin alabileceği değerler $y=0,1,2$

dir.

X ile Y birlikte düşünüldüğünde, (X,Y) iki boyutlu rasgele değişkeninin alabileceği değerler

$$(x,y)=(0,2),\ \ (1,1),\ \ (2,0)$$

olur.

Tanım (Ortak olasılık fonksiyonu): (X,Y) sıralı ikilisi bir S örnek uzayında tanımlanan iki boyutlu rasgele değişken olsun. (X,Y) 'nin alabileceği değerler $i = 1,2,\dots,m$ ve $j = 1,2,\dots,n$ olmak üzere $\left(x_i\,,\ y_j\right)$ ise aşağıdaki şartları sağlayan $f\left(x_i\,,\ y_j\right) = P(X = x_i\,, Y = y_j)$ fonksiyonuna X ve Y rasgele değişkenlerinin *ortak olasılık fonksiyonu* denir.

1) $f\left(x_i\,, y_j\right) \geq 0$, $tüm$ $\left(x_i\,, y_j\right)$ $çiftleri\ için$
2) $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f\left(x_i\,, y_j\right) = 1$

X ve Y rasgele değişkenlerinin *ortak olasılık fonksiyonu* aşağıdaki tabloda gösterildiği gibidir.

$\mathbf{X \setminus Y}$	$\mathbf{y_1}$	$\mathbf{y_2}$	$\cdots$	$\mathbf{y_n}$	$P(X = x)$
$\mathbf{x_1}$	$\mathbf{f(x_1\,, y_1)}$	$\mathbf{f(x_1\,, y_2)}$	$\cdots$	$\mathbf{f(x_1\,, y_n)}$	$f(x_1)$
$\mathbf{x_2}$	$\mathbf{f(x_2\,, y_1)}$	$\mathbf{f(x_2\,, y_2)}$	$\cdots$	$\mathbf{f(x_2\,, y_n)}$	$f(x_2)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\mathbf{x_m}$	$\mathbf{f(x_m\,, y_1)}$	$\mathbf{f(x_m\,, y_2)}$	$\cdots$	$\mathbf{f(x_m\,, y_n)}$	$f(x_m)$
$P(Y = y)$	$f(y_1)$	$f(y_2)$	$\cdots$	$f(y_n)$	1

Tablonun son sütunundaki olasılıklar, X rasgele değişkeninin olasılık dağılımını oluşturur. Buna, X 'in " *marjinal olasılık fonksiyonu* " denir ve aşağıdaki özelliklere sahiptir.

a) $f(x_i) = f_x(x_i) = \sum_{j=1}^{n} f\left(x_i\,, y_j\right)$
b) $\sum_{i=1}^{m} f(x_i) = 1$

Benzer biçimde, ortak olasılık tablosunun son satırındaki olasılıklar, Y rasgele değişkeninin olasılık dağılımını oluşturur. Buna, Y 'in " *marjinal olasılık fonksiyonu* " denir ve aşağıdaki özelliklere sahiptir.

a) $f\left(y_j\right) = f_y\left(y_j\right) = \sum_{i=1}^{m} f\left(x_i\,, y_j\right)$
b) $\sum_{j=1}^{n} f\left(y_j\right) = 1$

NOT: X ve Y kesikli rasgele değişkenlerinin bağımsız olmaları için gerek ve yeter şart, tüm $(x_i\,,y_j)$ ler için

$$P(X = x_i\,, Y = y_j) = P(X = x_i)P(\,Y = y_j)$$

olmasıdır.

Örnek. İki tane hilesiz madeni para havaya atıldığında

X : $Üste\ gelen\ turaların\ sayısı$

Y : $Üste\ gelen\ yazıların\ sayısı$

olarak tanımlandığında,

a) (X, Y) rasgele değişkeninin olasılık dağılımını elde ediniz.
b) X rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonunu bulunuz.
c) Y rasgele değişkeninin marjinal olasılık fonksiyonunu bulunuz.
d) X ve Y rasgele değişkenleri bağımsız mıdır?

Çözüm.

Örnek uzayı: $S = \{TT, TY, YT, YY\}$

X 'in alabileceği değerler $x = 0, 1, 2$

Y 'nin alabileceği değerler $y = 0, 1, 2$

a)

X \ Y	**0**	**1**	**2**	$P(X = x)$
0	**0**	**0**	**1/4**	1/4
1	**0**	**2/4**	**0**	2/4
2	**1/4**	**0**	**0**	1/4
$P(Y = y)$	1/4	2/4	1/4	1

b)

$X = x$	0	1	2
$f(x) = P(X = x)$	$1/4$	$2/4$	$1/4$

c)

$Y = y$	0	1	2
$f(y) = f_y(y_j) = P(Y = y)$	1/4	2/4	1/4

d) Tüm (x_i, y_j) ler için, $P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j)$ olup olmadığına bakılacak.

Örneğin, $x = 0$ ve $y = 0$ için

$P(X = 0, Y = 0) = 0$, $P(X = 0) = 1/4$, $P(Y = 0) = 1/4$

$$P(X = 0, Y = 0) \neq P(X = 0)P(Y = 0)$$

olduğundan X ve Y rasgele değişkenleri bağımsız değildir. ($0 \neq \frac{1}{4}\frac{1}{4}$)

Tanım (Ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu): (X, Y) , düzlemin bir D bölgesinde (sayılabilir olmayan bir küme içinde) tüm değerleri alabilen sürekli rasgele değişken olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan $f(x, y)$ fonksiyonuna, (X, Y) rasgele değişkeninin *ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu* denir.

1) $f(x, y) \geq 0$, $tüm\ (x, y) \in D\ için$
2) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dydx = 1$

Tanım. İki boyutlu sürekli (X, Y) rasgele değişkeninin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x, y)$ olsun. X ile Y nin *marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonları* sırasıyla,

$$g(x) = f_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy \quad \text{ve} \quad h(y) = f_y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dx$$

olarak tanımlanır.

NOT: X ve Y bağımsız sürekli rasgele değişkenler ise,

$$f(x, y) = g(x)h(y) = f_x(x)f_y(y)$$

dir.

Tanım (Ortak dağılım fonksiyonu): (X, Y) , iki boyutlu (kesikli yada sürekli) rasgele değişken olsun.

$$F(X, Y) = P(X \leq x\,,\ \ Y \leq y)$$

fonksiyonuna (X, Y) 'nin ortak dağılım fonksiyonu denir.

NOT: X ve Y 'nin her değeri için,

$$F(X, Y) = F(X)F(Y) = F_X(X)F_Y(Y)$$

ise X ve Y rasgele değişkenleri bağımsızdır denir.

$F(X)$ ve $F(Y)$ marjinal dağılım fonksiyonları, aşağıdaki biçimde elde edilir:

(X, Y) kesikli ise;

$$F_X(X) = \sum_{i=1}^{x} \sum_{j=1}^{n} f(u_i, y_j)$$

$$F_Y(Y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{y} f(x_i, v_j)$$

(X, Y) sürekli ise;

$$F_X(X) = \int_{-\infty}^{x} \int_{y} f(u, y) dy du$$

$$F_Y(Y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{x} f(x, v) dx dv$$

Tanım (Koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonu):

(X,Y) , ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x,y)$ olan iki boyutlu sürekli rasgele değişken ve $g(x)$ ile $h(y)$ sırasıyla X ile Y in marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonları olsun.

Verilen bir $Y=y$ için X in koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$g(\,X\,/\,Y=y)=g(\,x/y)=\frac{f(x,y)}{h(y)} \quad , \quad h(y)>0$$

Verilen bir $X=x$ için Y nin koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$h(\,Y\,/\,X=x)=h(\,y/x)=\frac{f(x,y)}{g(x)} \quad , \quad g(x)>0$$

olarak tanımlanır.

Örnek.

$$f(x,y)=\begin{cases} k(x^2-y) \; ; & 1<x<3 \;\; , \quad\quad 0<y<1 \\ \quad 0 \quad\quad ; & \quad\quad diğer\ d. \end{cases}$$

veriliyor.

a) $f(x,y)$ nin ortak olasılık yoğunlık fonksiyonu olabilmesi için k ne olmalıdır?
b) X ile Y nin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonlarını elde ediniz.
c) X ve Y bağımsız mıdır?
d) $P(X<2\,,y<0.5)=?$
e) $F(X,Y)=?$
f) X ile Y nin marjinal dağılım fonksiyonlarını bulunuz..
g) $P(X>2\ /\ y>0.5)=?$
h) $P(Y<0.4\ /\ x>2)=?$

Çözüm. a) $f(x,y)$ nin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu olabilmesi için $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dydx = 1$ olmalıdır.

$\int_1^3 \int_0^1 k(x^2-y)dydx = 1 \Rightarrow k = \frac{3}{23}$ bulunur ve

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3}{23}(x^2-y) \ ; & 1 < x < 3 \ , \quad 0 < y < 1 \\ 0 \qquad ; & diğer\ d. \end{cases}$$

olur.

b)

X in marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu; $g(x) = f_x(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$ ile

$$g(x) = f_x(x) = \int_0^1 \frac{3}{23}(x^2-y)dy = \frac{3}{23}\left[\left(x^2y - \frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^1\right] = \frac{3}{23}\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)$$

$$g(x) = f_x(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{23}\left(x^2 - \dfrac{1}{2}\right) \ , & 1 < x < 3 \\ 0 \qquad , & diğer\ d. \end{cases}$$

bulunur.

Y nin marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonu; $h(y) = f_y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$ ile

$$h(y) = f_y(y) = \int_1^3 \frac{3}{23}(x^2-y)dx = \frac{3}{23}\left[\left(\frac{x^3}{3} - yx\right)\Big|_1^3\right] = \frac{1}{23}(26-6y)$$

$$h(y) = f_y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{23}(26-6y) \ , & 0 < y < 1 \\ 0 \qquad , & diğer\ d. \end{cases}$$

c)

$f(x,y) \overset{?}{=} g(x)h(y)$

$$\frac{3}{23}(x^2-y) \neq \frac{3}{23}\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{23}(26-6y)$$

olduğundan X ve Y bağımsız değildir.

d)

$$P(X < 2\,, y < 0.5) = \int_1^2 \int_0^{0.5} \frac{3}{23}(x^2 - y)dydx = 0.13586$$

e)

$$F(X,Y) = P(X \le x\,,\;\; Y \le y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(x,y)dydx = \int_1^x \int_0^y \frac{3}{23}(x^2 - y)dydx$$

$$= \frac{1}{46}(2x^3y - 3y^2x + 3y^2 - 2y)$$

$$F(X,Y) = \begin{cases} 0 & ; \quad x \le 1\;, \qquad y \le 0 \\ \dfrac{1}{46}(2x^3y - 3y^2x + 3y^2 - 2y) & ; \;\; 1 < x < 3\,,\;\; 0 < y < 1 \\ 1 & ; \qquad x \ge 3 \;\;,\;\; y \ge 1 \end{cases}$$

f)

$$F_X(X) = \int_{-\infty}^{x} \int_{y} f(u,y)dydu = \int_1^x \int_0^1 \frac{3}{23}(u^2 - y)dydu \Rightarrow$$

$$F_X(X) = \begin{cases} 0 & ; \quad x \le 1 \\ \dfrac{1}{46}(2x^3 - 3x + 1) & ; \quad 1 < x < 3\,, \\ 1 & ; \qquad x \ge 3 \end{cases}$$

$$F_Y(Y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{x} f(x,v)dxdv \int_0^y \int_1^3 \frac{3}{23}(x^2 - v)dxdv \Rightarrow$$

$$F_Y(Y) = \begin{cases} 0 & ; \qquad y \le 0 \\ \dfrac{1}{46}(52y - 6y^2) & ; \quad 0 < y < 1 \\ 1 & ; \qquad y \ge 1 \end{cases}$$

g)

$$g(\,x/y) = \frac{f(x,y)}{h(y)} \quad , \;\; h(y) > 0$$

$$P(X > 2 \;\; / \;\; Y > 0.5) = \frac{P(X > 2 \;\; , \;\; Y > 0.5)}{P(\,Y > 0.5)} = \frac{\int_2^3 \int_{0.5}^1 \frac{3}{23}(x^2 - y)dydx}{\int_{0.5}^1 \frac{1}{23}(26 - 6y)dy} = 0.64$$

h)

$$P(Y < 0.4 \;\; / \;\; X > 2) = \frac{P(X > 2 \;\; , \;\; Y < 0.4)}{P(\,X > 2)} = \frac{\int_2^3 \int_0^{0.4} \frac{3}{23}(x^2 - y)dydx}{\int_2^3 \frac{3}{23}\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)dx} = 0.42$$